

Tema 8. Lógica Difusa

Francisco José Ribadas Pena

MODELOS DE RAZONAMIENTO Y APRENDIZAJE

5º Informática

`ribadas@uvigo.es`

17 de mayo de 2010

8.1 Introducción

- Lógica difusa/borrosa/"fuzzy"
- L. Zadeh (1965): aplica lógica multivaluada a la teoría de conjuntos
- Problemas aproximaciones clásicas:
 - Conceptos sin definición clara: ser alto, ser joven, estar muy cerca,...
 - Lógica clásica (bivaluada) demasiado restrictiva.
 - hay afirmaciones que pueden no ser ni VERDADERAS ni FALSAS
 - Objetos del mundo real no tienen criterios de pertenencia definidos de forma precisa
- Util para representar:
 - conceptos que tengan imprecisión/incertidumbre y operar con ellos
 - procesos complejos, procesos no lineales.
 - manejar experiencia basada en conceptos imprecisos
 - partes del sistema desconocidas o que no pueden medirse de forma fiable
- Principales aplicaciones:
 - Sistemas Expertos Difusos
 - Control de sistemas (tráfico, vehículos, electrodomésticos,...)

8.2 Conjuntos Difusos

- Formalismo de representación de la imprecisión y la incertidumbre
- Generalización de la teoría convencional de conjuntos
- Elementos pertenezcan parcialmente a más de un conjunto con diferentes grados de pertenencia
- Posibilidad de tratamiento lingüístico de dichos elementos
- Combinan dos tipos de computaciones:
 - Numérica: cálculos con valores numéricos
 - Simbólica: usada en I.A.

Definición

- Conjuntos Difusos:
 - Un conjunto difuso A en un dominio D , viene caracterizado por una **función de pertenencia** $f_A(x)$ que asocia a cada elemento x del dominio, un valor en el intervalo $[0, 1]$ que determina su grado de pertenencia a ese conjunto.
 - se relaja la función de pertenencia, $f_A(x) \in [0, 1] \forall x \in D$
 - valores extremos: $\begin{cases} 0 & \text{(no pertenencia a } A) \\ 1 & \text{(pertenencia total a } A) \end{cases}$
- Conjuntos Clásicos: Caso particular de los conjuntos difusos
 - Función de pertenencia discreta: $f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

(a) Funciones de pertenencia

- Representación de conjuntos difusos mediante **función de pertenencia** f_A (notación funcional)
 - Dependen del concepto a definir, del contexto, de la aplicación...
 - Preferible funciones simples \Rightarrow (simplifican cálculos, no pierden exactitud)
 - En universos discretos \Rightarrow mediante conjunto de pares (notación extensional)

elemento $x \in D$ / grado de pertenencia a A

Ejemplo: concepto difuso "cerca de 4"

$$A = \{0/0, 1/0,1, 2/0,6, 3/1, 4/1, 5/1, 6/0,6, 7/0,1, \dots\}$$

- Funciones de Pertenencia Típicas:

TRIANGULAR

TRAPEZOIDAL

ESCALÓN

Otras (sigmoidal, gaussiana,...)

(b) Caracterización de un Conjunto Difuso

- **Altura:** mayor valor la función de pertenencia: $\max_{x \in D} \{A(x)\}$
- **Soporte:** elementos de D que pertenecen a A con grado > 0 :

$$\text{Soporte}(A) = x \in D | A(x) > 0$$

- **Núcleo:** elementos de D que pertenecen al conjunto con grado 1:

$$\text{Nucleo}(A) = x \in D | A(x) = 1$$

- α -**Corte:** elementos de D con grado de pertenencia de al menos α :

$$A_\alpha = \{x \in D | A(x) \geq \alpha\}$$

- **Teorema de Representación:** Todo conj. difuso puede descomponerse en una familia de conjs. difusos.
 - Cualquier conjunto difuso puede reconstruirse a partir de una familia de sus α -cortes

(c) Propiedades de Conjuntos Difusos

- **Conjunto Vacío:** un conj. difuso es vacío si su función de pertenencia es siempre 0.

$$f_A(x) = 0 \quad \forall x \in D$$

- **Igualdad:** dos conjuntos difusos, definidos en el mismo universo D , son iguales si tienen la misma función de pertenencia:

$$A = B \text{ sii } f_A(x) = f_B(x), \quad \forall x \in D$$

- **Inclusión:** un conjunto difuso, A , está incluido en otro, B , si su función de pertenencia toma valores más pequeños:

$$A \subseteq B \text{ sii } f_A(x) \leq f_B(x), \quad \forall x \in D$$

(d) Operaciones sobre conjuntos difusos

■ Operaciones Binarias (definición original, Zadeh)

Unión:

$$A \cup B : f_{A \cup B}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$$

Intersección:

$$A \cap B : f_{A \cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$$

Complementación:

$$\neg A : f_{\neg A}(x) = 1 - f_A(x)$$

- Generalización de las operaciones sobre conjuntos clásicos.
- Otras funciones de combinación posibles: $\left\{ \begin{array}{l} \text{unión: suma acotada} \\ \text{intersección: producto} \end{array} \right.$

■ Propiedades

Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
Asociativa:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
Idempotencia:	$A \cup A = A, A \cap A = A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
DeMorgan	$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$

$$\text{NO SATISFACEN: } \left\{ \begin{array}{ll} \text{Contradicción :} & A \cap \neg A \neq \emptyset \\ \text{Medio excluido:} & A \cup \neg A \neq D \end{array} \right.$$

(e) Relaciones Difusas

- Permiten trabajar con combinaciones de más de un universo.
- Representan una asociación entre 2 o más elementos.
- Relación difusa: elementos pueden pertenecer a la relación parcialmente.
- **Definición:** Una **relación difusa** R en D es un conjunto difuso en el espacio producto $D \times D$. ($R \subseteq D \times D$)
 - Función grado de pertenencia: $f_R(x, y) : D \times D \rightarrow [0, 1]$
 - En universos discretos \rightarrow matrices de valores $[0, 1]$
 - Ejemplo: relación "aproximadamente igual que" ($x \approx y$).
Conjunto difuso en \mathbb{N}^2 , con la función de pertenencia:

$$f_{\approx} = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0,8 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,5 & 0,8 & 1 & 0,8 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,8 & 1 & 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,8 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0,8 & 1 \end{bmatrix}$$

- Incluye a las relaciones entre conjuntos clásicos.
- Extensión a n-dimensiones: R conjunto difuso en $D \times D \times \dots \times D$

$$f_R(x_1, \dots, x_n) : D \times D \times \dots \times D \rightarrow [0, 1]$$

- Distintos universos:
 - Siendo D_1 y D_2 dos universos, una relación difusa R entre D_1 y D_2 es un conjunto difuso definido en $D_1 \times D_2$.
 - Función de pertenencia: $f_R(x, y) \in [0, 1]$, $x \in D_1, y \in D_2$
 - Ejemplo: Sean $D_1 = \{Juan, Jorge\}$ y $D_2 = \{jamon, vino, queso\}$.
La relación difusa "gustar" se define por:

$$f_{gustar} = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 & 0,1 \\ 1 & 0,6 & 0,9 \end{bmatrix}$$

(f) Operaciones sobre Relaciones Difusas.

- **Unión, intersección, complemento:** como con conjuntos difusos
- **Composición de relaciones difusas:**
 - Dadas las relaciones difusas R en $D_1 \times D_2$ y S en $D_2 \times D_3$. Su composición $R \circ S$ es una relación en $D_1 \times D_3$ definida como:

$$R \circ S = \{(x, z) | \exists y \in D_2 \text{ verificando } (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}$$

Calculandose su función de pertenencia de la forma:

$$f_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in D_2} \{ \min \{ f_R(x, y), f_S(y, z) \} \}$$

con $x \in D_1, y \in D_2, z \in D_3$

- Ejemplo :

$$\begin{array}{ccc}
 R_{XY} & & R_{YZ} & & R_{XZ} = R_{XY} \circ R_{YZ} \\
 \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0,7 \\ 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,3 \end{bmatrix} & \circ & \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,7 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

- **Composición conjuntos y relaciones difusas:**
 - Siendo A conj. difuso en D_1 y R relación difusa en $D_1 \times D_2$. Su composición será un conjunto difuso B en D_2 definido como:

$$B = A \circ R = \{y | \exists x \in D_1 \text{ verificando } x \in A \text{ y } (x, y) \in R\}$$

Calculandose su función de pertenencia de la forma:

$$f_{A \circ R}(y) = \max_{x \in D_1} \{ \min \{ f_A(x), f_R(x, y) \} \}$$

con $x \in D_1, y \in D_2$

8.3 Lógica Difusa

- Generalización de la lógica multivaluada.
 - Utiliza grados de verdad de las fórmulas lógicas en lugar de una verdad estricta de cierto/falso.
- Permite representar y utilizar conceptos "imprecisos" y realizar razonamientos "aproximados".
- Un **grado de verdad** puede ser:
 - Un valor numérico del intervalo $[0,1]$. (0.2, 0.5, 0.75, ...)
 - Una etiqueta lingüística. (más o menos verdad, bastante ...)
- Los grados de verdad estarán asociados a conjuntos difusos.
 - Homomorfismo entre conjuntos difusos y lógica difusa.
- **OBJETIVO:** Extender la inferencia lógica, aplicándola a los conjuntos difusos de los grados de verdad.
- Se encarga de :
 - representar el significado impreciso de los enunciados imprecisos del lenguaje natural
 - soportar la propagación de imprecisión de premisas a conclusiones al realizar inferencias
- Combina métodos simbólicos (cualitativos) y numéricos (cuantitativos)
- Elementos:
 - **Fórmulas atómicas:** proposiciones y/o predicados.
 - $A(x) \equiv "x \text{ es } A" \rightarrow$ tomando A como conjunto difuso
 - Valor de verdad de la fórmula = Grado de pertenencia del conjunto ($f_A(x)$)
 - **Conectivas lógicas:** AND, OR, NOT, IMPLICACION
 - Construyen las fórmulas bien definidas (f.b.d) como en lógica clásica.

(a) Conectivas Lógicas

- Se corresponderán con las operaciones sobre conjuntos difusos.
 - proposiciones/predicados \approx conjuntos/relaciones difusas
 - grado de verdad \approx grado de pertenencia
 - conectivas lógicas \approx operaciones sobre conj. difusos

■ Conjunción (Y)

- Dados dos conjuntos difusos asociados a dos f.b.d., $P \subseteq D_1$ y $Q \subseteq D_2$, y un par $(x, y) \in D_1 \times D_2$, la **conjunción**, $P \wedge Q$, indica en qué medida x pertenece al conjunto difuso P e y pertenece al conjunto difuso Q .

$$f_{P \wedge Q}(x, y) = \min\{f_P(x), f_Q(y)\}$$

- Ejemplo: "*X es alto e Y es muy guapo*"

$$f_{\text{alto} \wedge \text{muy guapo}}(x, y) = \min\{f_{\text{alto}}(x), f_{\text{muy guapo}}(y)\}$$

- Cálculo del grado de verdad análogo a la intersección de conjuntos difusos

■ Disyunción (O)

- Dados dos conjuntos difusos asociados a dos f.b.d., $P \subseteq D_1$ y $Q \subseteq D_2$, y un par $(x, y) \in D_1 \times D_2$, la **disyunción**, $P \vee Q$, indica en qué medida x pertenece al conjunto difuso P o y pertenece al conjunto difuso Q .

$$f_{P \vee Q}(x, y) = \max\{f_P(x), f_Q(y)\}$$

- Ejemplo: "*La temperatura es alta o la humedad muy baja*"

$$f_{\text{temp alta} \vee \text{hum muy baja}} = \max\{f_{\text{temp alta}}(x), f_{\text{hum muy baja}}(y)\}$$

- Cálculo del grado de verdad análogo a la unión de conjuntos difusos.

■ Negación (NO)

- Dado un conjunto difuso asociado a una f.b.d., $P \subseteq D$, la negación se corresponde con el cálculo del complementario.

$$f_{\neg P}(x) = 1 - f_P(x)$$

■ Implicación (SI...ENTONCES)

- Múltiples definiciones posibles (distintas fórmulas de combinación)
- $f_{A \rightarrow B}(x, y)$ representa el grado de verdad de la implicación entre x e y .
- Define una relación difusa entre los conjuntos P y Q .
- Da soporte a las reglas difusas.
- Ejemplo: "si la temperatura X es muy alta, entonces la humedad Y es baja"
- Implicación de Kleene :

$$f_{P \rightarrow Q}(x, y) = \max\{1 - f_P(x), f_Q(y)\}$$

- Mantiene la equivalencia $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ de la lógica clásica.
- En la práctica interesa que sean fáciles de calcular, aunque no cumplan la relación.
- Ejemplo: "si la temp. (X) es alta, entonces subida normal (Y) de la calefacción"

$$f_{\text{temp. alta} \rightarrow \text{sub. normal}}(x, y) = \max\{1 - f_{\text{temp. alta}}(x), f_{\text{sub. normal}}(y)\}$$

(b) Variables Lingüísticas

- **Variable Lingüística:** variable cuyos valores son palabras o sentencias
 - Sus valores son **etiquetas lingüísticas**
 - Ejemplos:

Variable	Expresiones Ling.	Dominio
altura	"bajo", "muy alto", "aprox 1,80"	numérico (cm.)
belleza	"muy guapo", "feo", "un callo", ...	personas (discreto)

- Usadas (principalmente) en la definición de reglas difusas.
- Utilidad
 - Comprimir información: Una etiqueta incluye muchos valores
 - Caracterizar fenómenos mal definidos o complejos
 - Trasladar conceptos lingüísticas a descripciones numéricas
→ traduce proceso simbólico a proceso numérico.
- **Etiqueta Lingüística:** Términos lingüísticos definidos como conjuntos difusos (sobre cierto dominio).
 - Terminos primarios: asociados a un conjunto difuso L sobre el dominio de la variable.
Ejemplos: alto, bajo, normal, pequeño, ... (sobre variables: temperatura, estatura, etc...)
 - Terminos compuestos: su conj. difuso se define a partir del de los términos primarios usando modificadores lingüísticos y cuantificadores.
Ejemplos: muy alto, moderadamente alto, poco bajo, extremadamente pequeño, ...

- **Modificador lingüístico:** operador que transforma el conjunto difuso asociado a un término primario L en otro conjunto difuso.
Ejemplos:

- Concentración: Elevar valores de L a p con $p > 1$.
"Muy L " o "aproximadamente igual a L " ($p = 2$)
"Más L " ($p=1.5$)
- Dilatación: Raíz n -ésima o elevar a $p \in (0, 1)$.
"Más o menos L " ($p=0.5$)
"Menos L ", "Poco L " ($p=0.75$)
- Intensificación del contraste: disminuir valores menores que 0.5 y aumentar los otros.
"Especialmente L ", "Bastante cerca de L " ...
- Difuminación: efecto contrario.
"Cerca de L ", "Casi L " ...

- **Cuantificadores Lingüísticos o Difusos:** cuantifican la cantidad de objetos que cumplen cierta condición.

- En lógica clásica : \forall (todo), \exists (existe)
- En Lógica difusa hay más:

◇ Absolutos: se refieren a una única cantidad

"muchos", "pocos", "muchísimos", "aprox entre 6 y 9", "aprox. más de 43"

◇ Relativos: se refieren a una proporción de elementos respecto del total

"la mayoría", "la minoría", "casi todos", "casi ninguno", "prox. la mitad"

(c) Razonamiento Difuso

- Lógica Difusa pretende formular reglas de razonamiento aproximado
→ Lógica Clásica: inferencia sólo posible si datos coinciden exactamente con las premisas.
- **Inferencia difusa:** Proceso mediante el cual se obtiene como conclusión un conjunto difuso a partir de unas premisas también difusas
- Principal regla de inferencia: **Modus Ponens Difuso**
→ Generalización Modus Ponens de logica clásica

MODUS PONENS CLASICO

(1) $P \rightarrow Q$

(2) P

(3) Q

MODUS PONENS DIFUSO

(1) Si x es A , entonces y es B

(2) x es \mathfrak{A}

(3) y es \mathfrak{B}

- A y B son conjuntos difusos
- “ x es \mathfrak{A} ” representa x es “algo parecido” a A (pertenencia no total)
- “ y es \mathfrak{B} ” representa y es “algo parecido” a B (pertenencia no total)
- Se pretende soportar inferencias del tipo:
 - (1) Si la curva es muy cerrada, reducir la velocidad.
 - (2) La curva es ligeramente cerrada

 - (3) Reducir un poco la velocidad

- **Modus ponens difuso**, Definición clásica (Zadeh)
 - Basado en la composición de conjuntos y relaciones ($A \rightarrow B$).

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \circ (A \rightarrow B)$$

- Función de pertenencia de \mathfrak{B} :

$$f_{\mathfrak{B}}(y) = \max_{x \in \mathfrak{A}} \{ \min \{ f_{\mathfrak{A}}(x), f_{A \rightarrow B}(x, y) \} \}$$

- Usando la implicación clásica de Kleene:

$$f_{\mathfrak{B}}(y) = \max_{x \in \mathfrak{A}} \{ \min \{ f_{\mathfrak{A}}(x), \max \{ 1 - f_A(x), f_B(y) \} \} \}$$

- Ejemplo: (Dominio discreto, nos. enteros)

Conjuntos:

B : temp. baja (Dom. discreto $\{0,1,\dots,10\}$) $f_B = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0,6, 0,3, 0, 0, 0]$

S : subida normal (Dom. discreto $\{0,2,4,\dots,14\}$) $f_S = [0, 0, 0, 0, 0,5, 1, 0,5, 0]$

Regla: *SI temp. es baja (B) ENTONCES subida normal de calefacción (S)*

Cálculo relación $B \rightarrow S$: $\begin{cases} f_{\neg B} = 1 - f_B = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,4, 0,7, 1, 1, 1] \\ f_{B \rightarrow S}(x, y) = \max \{ 1 - f_B(x), f_S(y) \} \end{cases}$

$$f_{B \rightarrow S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,7 & 0,7 & 0,7 & 0,7 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado el conj. \mathfrak{B} : “temp. muy baja”, con dominio $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ y $f_{\mathfrak{B}} = [0,8, 0,4, 0,2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Calcular el conjunto difuso, \mathfrak{C} , resultante ($\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \circ B \rightarrow S$).

$$i f_{\mathfrak{C}}(y) = \max_x \{ \min \{ f_{\mathfrak{B}}(x), f_{B \rightarrow S}(x, y) \} \} = ?$$

Fuzzyficación y desfuzzyficación

- En aplicaciones prácticas (SS.EE. difusos + sistemas de control)
 - Valores de entrada y salida no son conjuntos difusos (valores numéricos concretos)
 - Necesidad procesos adicionales: *fuzzyficación/desfuzzyficación*.
- **FUZZIFICACIÓN** (borrosificación, difuminación)
 - Construir un conjunto difuso A , a partir de una entrada concreta (no difusa) x_i .
 - Uso de funciones de pertenencia *singleton*

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = X_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

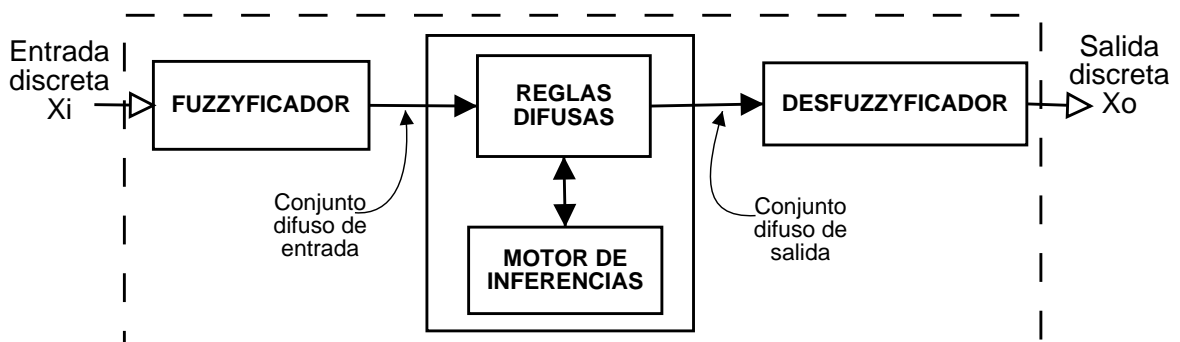
- Simplifica los cálculos en reglas : $f_{\mathfrak{B}} = \min\{1, f_{A \rightarrow B}(x, y)\}$
- **DESFUZZIFICACIÓN** (desborrosificación, desdifuminación)
 - Obtener un valor concreto x_o a partir la función de pertenencia de un conjunto difuso (resultado de la inferencia: \mathfrak{B})
 - Transformación de la función de pertenencia obtenida en un único valor numérico discreto.
 - Métodos
 - *Máxima pertenencia*: devolver elemento del dominio cuyo grado de pertenencia (valor $f_{\mathfrak{B}}$) sea mayor.
→ si hay varios: calcular media
 - *Centro de gravedad (centroide)*: devolver el centro de gravedad de la función de pertenencia del conj. \mathfrak{B}

$$x_o = \frac{\sum_{i=1}^n f_{\mathfrak{B}}(x_i) \times x_i}{\sum_{i=1}^n f_{\mathfrak{B}}(x_i)} \quad (\text{en dominios continuos } \rightarrow \text{ integrales})$$

- *Centro de área*: devolver el valor que hace que el área a su derecha y a su izquierda sea la misma.

(d) Aplicaciones

- Sistemas basados en lógica difusa
- Permiten relacionar entradas y salidas mediante funciones no lineales representadas por reglas difusas.
- Componentes:
 - reglas difusas: proporcionadas por expertos o “aprendidas”
 - motor de inferencias
 - “fuzzificador” + “desfuzzificador”



- Areas de aplicación:
 - Sistemas Expertos Difusos
 - Controladores de procesos difusos (comun en sistemas embebidos [electrodomesticos, cohes, etc,])
- **Ventajas**
 - Combina razonamiento simbólico y numerico
 - Analogía con forma de expresión humana
 - Simplicidad y eficiencia computacional
 - Caracteristicas adecuadas para ciertas areas → “asegura” aplicaciones exitosas
- **Inconvenientes**
 - En ocasiones, difícil interpretación de los valores difusos (semántica poco clara).
 - Difícil justificación de los razonamientos efectuados
 - Múltiples definiciones de operadores y reglas de inferencia → difícil ajustar el sistema